MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE COMMUNE : ORAL

Sylvain Arlot, Matthieu Lerasle

Coefficient : 2

Durée de préparation : 1 heure

Durée de passage devant le jury : 30 minutes

Sujet : 2 exercices (que le candidat doit traiter tous les deux, et exposer dans l'ordre qu'il souhaite)

Préparation : L'usage de la calculatrice ou de tout autre document est interdit

1. Commentaires généraux

L'impression générale du jury sur l'oral de mathématiques est bonne, avec une amélioration significative par rapport à l'année précédente. La moyenne d'abord, est en progression à 11.4 contre 10 en 2012 et 10,9 en 2011 (avec des critères de notation identiques). Les très bons candidats ont été nombreux, nous avons eu le plaisir de voir six d'entre eux obtenir au moins 19 et deux recevoir 20, ce qui ne s'était jamais produit au cours des dix dernières années au moins. Enfin, parmi les candidats les moins à l'aise, nous avons pu vérifier que très peu présentaient de grosses lacunes de cours ou étaient incapables de faire des calculs simples : seuls six candidats ont obtenu des notes inférieures ou égales à 6.

Autre élément statistique, l'écart-type est en légère augmentation à 4.48 en 2013 contre 3,97 en 2012, 4,39 en 2011. Il est à peu près équivalent à ceux des autres épreuves obligatoires, ce qui garantit un bon équilibre entre ces matières à l'oral.

Comme à l'habitude, chaque planche est constituée de deux exercices totalement indépendants. Chaque couplage est construit dans un triple objectif d'équilibre : couverture thématique (analyse, algèbre, probabilités / statistiques), difficulté (deux exercices moyens, ou bien un exercice facile ou court avec un plus difficile ou plus long), et originalité. Le jury a de nouveau proposé dans chaque planche un exercice classique de manière à tester les connaissances de base des candidats et un autre plus original pour tester leurs aptitudes à s'adapter à un contexte nouveau.

Toutes les planches (un peu plus nombreuses que nécessaire en fait) sont prêtes avant le début des épreuves : elles couvrent toutes les notions au programme, leur numéro n'a aucune signification, et leur ordre d'arrivée au cours des oraux est le fruit purement aléatoire du tirage des premiers candidats de chaque série.

Quelle que soit la difficulté des exercices (qui est évidemment prise en compte dans la notation), nous insistons une nouvelle fois sur l'importance de la reprise : même sans avoir fait grand chose pendant sa préparation, un candidat peut obtenir une très bonne note s'il réagit bien aux indications du jury.

Nous tenons à saluer les candidats qui ont paru très à l'aise avec les séries de Riemann ou certains résultats non élémentaires sur les variables aléatoires de Poisson. De même, certains candidats ont su proposer des réponses et de très bonnes intuitions de preuves sur des exercices de combinatoires, ou ont eu le bon réflexe de vérifier leur résultats généraux sur des cas particuliers, ce que nous avons toujours mis en valeur.

Seule ombre au tableau, les performances des candidats en statistique ont été très faibles cette année encore. C'est d'autant plus dommage que les questions posées sur ce sujet sont en général bien plus élémentaires que dans d'autres domaines.

Enfin, nous avons malheureusement déploré un grand nombre d'étourderies au tableau. Par exemple, dans la planche 9, aucun candidat n'a su recopier correctement la matrice A alors que tous avaient pourtant su l'obtenir correctement au brouillon.

2. Déroulement de l'oral

Le déroulement de l'oral (présentation synthétique des résultats obtenus lors de la préparation, en 10 minutes maximum, puis reprise avec le jury) reste inchangé. Il donne l'opportunité à tout candidat de montrer tout ce qu'il a su faire dans les deux exercices proposés, puis au jury de tester ses réactions face à différentes indications ou bien de vérifier sa connaissance du cours.

Nous insistons à nouveau sur l'importance de la reprise, chaque candidat a intérêt à se montrer *synthétique* lors de l'exposé initial de sa préparation, quitte à ne pas utiliser l'intégralité des dix minutes qui lui sont accordées : plus longue est la reprise, plus le nombre de question finalement traitées a des chances d'être élevé. Un exposé très court n'est jamais pénalisé en soi.

Nous encourageons les candidats à se méfier de l'impression qu'ils ont de leur prestation, qui ne reflète probablement pas leur note. Ainsi, quelle que soit sa préparation, un candidat ne doit jamais se démobiliser en croyant avoir raté son oral, alors que les attentes du jury ne sont pas exactement les mêmes sur tous les exercices. Par exemple, pour certains exercices difficiles, traiter parfaitement et en intégralité une question est déjà suffisant pour obtenir une bonne note.

3. Conseils aux candidats

L'exposé initial ne doit pas se limiter à la liste des questions abordées, il est également parfaitement inutile de passer plus de dix secondes à énumérer ces numéros de questions, il est bien plus intéressant de les faire apparaître clairement au tableau en donnant le détail des résultats obtenus.

Il n'est pas nécessaire non plus de préciser tous les calculs pendant l'exposé (par exemple, le calcul de l'inverse de M dans l'exercice 2 de la planche 8), le jury reviendra sur certains points si nécessaire. On risque ainsi de remplir le tableau de calculs élémentaires inutiles pour la suite en perdant un temps qui serait sûrement plus utile lors de la reprise.

À l'inverse, il peut être préjudiciable de ne pas écrire du tout au tableau, ne serait-ce que les résultats aux questions, ou certains calculs intermédiaires que l'on doit réutiliser plusieurs fois au long de l'exposé. Il est important de bien user de ce support pour appuyer son argumentation.

4. Commentaires sur les planches

Planche 1: L'exercice 1 était classique et sans difficulté particulière. À la question 2, un candidat a su prouver le résultat sans avoir recours à la loi de Poisson, ce qui est tout à fait admissible mais un peu plus long.

L'exercice 2 était un peu plus délicat, notamment la question 3, mais a été très bien réussi par deux très bons candidats. La question 1 a curieusement posé un certain nombre de problèmes pendant la préparation qui ont été bien corrigés à la reprise. Il fallait en particulier bien faire attention à montrer que $f(P) \in E_n$.

Planche 3: L'exercice 1 visait à démontrer une formule classique (au moins dans le cas des variables positives) reliant l'espérance et la fonction de répartition d'une variable aléatoire. La difficulté était de faire proprement l'intégration par partie qui faisait apparaître deux termes divergents. Seul un très bon candidat a résolu entièrement cette question.

Les deux premières questions du deuxième exercice ont été plutôt bien réussies. La troisième question était plus délicate et a posé plus de problèmes. À la question 4, un candidat a pensé à utiliser le fait que M est équivalente à une matrice diagonale avec r coefficients non nuls.

Planche 5: Le premier exercice d'algèbre linéaire abstrait ne nécessitait que des connaissances de bases sur les familles libres et liées ainsi qu'un peu de logique. Il a été plutôt bien réussi, en particulier les trois premières questions.

Le deuxième exercice a posé beaucoup plus de difficultés. En particulier, dans la question 3, deux candidats ont parlé de loi binomiale pour une somme de variables de Bernoulli indépendantes en oubliant le fait que les paramètres n'étaient pas les mêmes. La question 4, peu abordée, faisait apparaître la série harmonique.

Planche 6: L'exercice 1, très simple, a été très bien réussi par les candidats.

L'exercice 2 permettait de tester la connaissance des séries de Riemann et de la comparaison série-intégrale, avec une application en combinatoire. Le théorème sur les séries de Riemann était bien connu des candidats. Il était en revanche très délicat d'obtenir le résultat de la question 3, ce qu'un excellent candidat a su faire.

Planche 8: L'exercice 1 était court et demandait de retrouver un résultat classique sur la loi de la somme de variables aléatoires de Poisson indépendantes via la transformée de Laplace. La transformée de Laplace semblait classique pour un candidat, qui a su restituer les preuves très clairement, ce qui est indispensable lorsqu'on évoque un résultat hors programme. Deux autres connaissaient la loi de la somme de variables aléatoires de Poisson indépendantes, mais un seul a su le démontrer. Deux candidats ont pensé à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, ce qui est très bien même si ce résultat n'est pas explicitement au programme.

La première question du deuxième exercice a été bien réussie. La deuxième question a posé d'importants problèmes de logique. Étonnamment, seuls 2 candidats ont mené à bien la preuve de la convergence de l'intégrale en $-\infty$. La question 4 n'a pas été abordée.

Planche 9: Le premier exercice est très classique, et a été globalement bien réussi par les candidats. Il nécessitait toutefois d'être capable de mener sans erreurs des calculs assez longs, ce que les candidats ont diversement réussi. Nous attirons l'attention des candidats sur le fait qu'il est important d'être attentif en copiant au tableau des calculs déjà faits au brouillon. Par exemple, aucun des quatre candidats n'a recopié la matrice A sans erreur à la question 1.

Le deuxième exercice est beaucoup plus original, et a été peu abordé par les candidats lors de leur préparation, sans doute en partie à cause de la longueur de l'exercice 1. Nous avons quand même été déçus de voir la question 2 poser autant de problèmes. Visiblement, manipuler des variables aléatoires à valeurs dans $\{-1, 1\}$ ne va pas de soi, par exemple pour réaliser que $\varepsilon_1\varepsilon_2 = 1$ équivaut à $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Les questions 3 et 4 n'ont pratiquement pas été abordées.

Planche 10: Le premier exercice tournait autour des rotations sous l'angle de l'algèbre linéaire. Les candidats connaissaient bien leurs formules de trigonométrie et ont mené à bien les calculs jusqu'à la question 3. Plusieurs candidats ont su discuter avec le jury de l'interprétation géométrique qui permettait de donner des réponses élégantes aux questions 3 et 4.

Le deuxième exercice proposait trois preuves d'une égalité de combinatoire que deux candidats ont su présenter avec clarté.

Planche 11: L'exercice 1 tournait autour des séries alternées. À la deuxième question, les candidats qui invoquent un théorème de convergence des séries alternées sont censés pouvoir le redémontrer a minima dans ce cas particulier. L'exercice a été globalement réussi, jusqu'à la dernière question le plus souvent abordée avec succès lors de la reprise.

Le deuxième exercice abordait diverses questions de combinatoire. Le jury a été surpris que la question 1 ait posé autant de difficultés : un seul candidat a su calculer la probabilité d'être dans le même binôme, et aucun la probabilité d'être dans le même groupe de quatre. Le problème principal ici semble être de bien identifier ce qu'est un "cas favorable" et un "cas possible", et de prendre la même convention pour les deux (on pouvait compter les configurations générales des $2n$ binômes ou bien les configurations pour le groupe d'Antoine uniquement). En revanche, à la question 2, le calcul du nombre de binômes mixtes a été réussi par tous les candidats, et deux candidats ont présenté de bonnes idées pour la deuxième partie de cette question. Plusieurs candidats ont également fait preuve d'esprit critique dans cet exercice (en vérifiant que les probabilités de la question 1 sont dans le bon ordre, ou que la formule est correcte pour $n = 1$ à la question 2), ce que le jury tient à saluer, et a valorisé dans sa notation ; dans un exercice de combinatoire, cela nous semble être un réflexe indispensable.

Planche 12: Le premier exercice autour des comparaisons série-intégrale était classique, les questions 1 et 2 ont été très bien réussies. Pour la question 3, il fallait penser à la densité de la loi normale et faire correctement le changement de variables, ce que les candidats n'avaient pas su faire en préparation mais que certains ont réussi avec une indication.

Le second exercice était plus original dans sa forme. La question 2 a dérouté plusieurs candidats pour lesquels la distinction entre probabilité de l'intersection et probabilité conditionnelle ne semblait pas claire dans ce cas précis. Avec l'aide du jury, les candidats ont pu la résoudre. La question 3 n'a été que très partiellement abordée. Signalons aux futurs candidats que, pour ce type de question, le jury saura apprécier une réponse intuitive à défaut d'un raisonnement parfaitement rigoureux.

Planche 13: Le premier exercice sur les comparaisons série-intégrale était sans originalité. La plupart des candidats se souvenaient de comment traiter la question 1. La question 3 a posé beaucoup de problèmes alors qu'il semblait au jury qu'il s'agissait d'un grand classique (seul le cas $\alpha = -1$ était un peu délicat).

L'exercice 2 abordait le problème de l'estimation de la moyenne dans un cadre original avec des erreurs dépendantes. Les calculs de biais ont été plutôt bien réussis. Les calculs de variance, plus difficiles, nécessitaient de savoir simplifier les séries géométriques, ce qui n'allait pas de soi pour les candidats. Un excellent candidat a presque terminé cet exercice lors de la préparation.

Planche 14: La première question du premier exercice était calculatoire et aucun candidat n'a su mener seul le calcul de f_1. Une représentation graphique des intervalles d'intégration, suggérée par le jury à la reprise, permettait pourtant d'obtenir le résultat sans difficulté. La question 2 nécessitait essentiellement de la rigueur de raisonnement. À la question 3, seul un candidat a pensé à appliquer le théorème des accroissements finis.

Le deuxième exercice se résumait à un grand classique de statistique autour des notions du programme. Le simple fait que les variables valent F ou H au lieu de 0 et 1 a posé d'immenses difficultés. La discussion avec les candidats s'est finalement limitée à une interrogation de cours, révélant qu'ils ne savaient énoncer correctement ni la loi des grands nombres ni la définition d'un intervalle de confiance.

Planche 16: Les deux premières questions de l'exercice 1, très classiques, n'ont pas posé beaucoup de problèmes aux candidats. Ils les avaient pour l'essentiel traitées pendant la préparation, le calcul de A_n^{-1} étant plus délicat. La question 3 a été abordée par tous les candidats, et souvent traitée avec l'aide du jury. La définition de la surjectivité était dans l'ensemble connue, mais peu ont su l'utiliser pour arriver au résultat. Nous avons été étonnés qu'aucun candidat ne pense à utiliser le résultat de la question 2 pour résoudre la question 3 : il semble que la relation entre φ et sa restriction φ_n à un sous-espace soit mal maîtrisée. La question 4 est une illustration simple du fait que la surjectivité n'implique pas la bijectivité en dimension infinie.

Pour la première question, il s'agissait de calculer un équivalent en 0 pour pouvoir prolonger les fonctions par continuité, ce que deux candidats ont bien su faire. La question 2 était globalement bien réussie. Les questions suivantes ont posé plus de problèmes. Plusieurs candidats connaissaient la relation $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$ et savaient la démontrer.

Planche 17: Les deux premières questions de l'exercice 1 n'ont pas posé de difficultés. La plupart des candidats ont pensé à appliquer la question 2 pour évaluer la probabilité demandée à la question 3. La seconde formulation, qui faisait appel à la question 1, était plus délicate et les candidats ont plutôt cherché à appliquer la formule des probabilités totales selon les valeurs du cardinal de $\{X_1, \ldots, X_n\}$. Aucun candidat n'avait obtenu la formule correcte pendant la préparation mais plusieurs y sont parvenus pendant l'oral. Toutefois, un candidat a bien conjecturé les réponses aux questions 4 (i) et (ii) en proposant des intuitions correctes, ce qui est une très bonne idée que nous avons valorisée.

La plupart des candidats ont bloqué sur l'exercice 2 pendant la préparation, pourtant, il s'agissait de raisonner sur les degrés, ce qui est assez standard dans un exercice portant sur les polynômes. Au final, deux candidats ont trouvé la bonne réponse aux questions 1, 2 et 3.

Planche 18: Le premier exercice était assez classique et les deux premières questions, ainsi qu'une partie de la question 3, ont été assez bien réussies. La fin de la question 3, notamment la justification de l'interversion limite et intégrale, était plus délicate. Le jury était satisfait de voir que les candidats savaient tracer le graphe d'arctan rapidement à l'oral.

Seules les trois premières questions de l'exercice 2 ont été abordées. Elles ont permis de tester la maîtrise de la notion de rang par les candidats. Un très bon candidat a su faire le raisonnement de la question 1 directement dans le cas général.

Planche 19: Le premier exercice abordait des propriétés classiques des polynômes sous l'angle de l'algèbre linéaire. Pour la première question, il était bon de penser à la relation entre coefficients d'un polynôme et les valeurs de ses dérivées successives en 0, ce que 2 candidats ont fait, mais en oubliant les $i!$. Aucun candidat n'a ensuite vu que l'injectivité impliquait que l'image était alors $\mathbb{R}^{k+1}$. La question 3 nécessitait de faire attention aux dimensions respectives des espaces de départ et d'arrivée.

Le second exercice proposait une manière de démontrer l'inégalité entre moyenne arithmétique et géométrique. Seules les deux premières questions ont été abordées par les candidats. C'est un exercice sur des fonctions de plusieurs variables qui pouvait être entièrement résolu sans faire appel aux notions du cours.